Домашна работа по Вероятностни модели

Янис Василев, ianis@ivasilev.net

17 февруари 2017 г.

Бележки

Ще бъдат използвани следните означения:

- $\mathbb{N}$ - естествените числа с нулата
- $\mathbb{N}^+$ - положителните естествени числа
- $\mathbb{Z}$ - целите числа
- $\mathbb{R}$ - реалните числа
- $\mathbb{R}^+$/ $\mathbb{R}^-$ - положителните / отрицателните реални числа
- $\left\{X|\sqrt{X} \in Z\right\}$ - множество
- $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$ или $X_1, \ldots, X_n$ - редица
- $(a, b)/[a, b]$ - отворен / затворен интервал от реални числа
- (a, b, c) - наредена n-торка
- $a, \ldots, b$ - интервал от цели числа ($[a, b] \cap \mathbb{Z}$)
- $\mathrm{I}_A(x)$ - индикатор за множеството A
- $\mathbb{E}$ - математическо очакване
- $\mathbb{D}$ - дисперсия
- $F_X(x)$ - функция на разпределение на сл. вел. X
- $S_X(x)$ - функция на оцеляване на сл. вел. X ($S_X(x) = 1 - F_X(x)$)
- $f_X(x)$ - плътност на сл. вел. X
- $\varphi_X(t)$ - характеристична функция на сл. вел. X
- $X \overset{d}{=} Y$ - X има същото разпределение като Y

1. Въведение

Задача 1.1

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е вероятностно пространство и A, B и $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ са събития от $\mathcal{F}$. Да се докажат следните свойства:

1.1.1. Монотонност

Ако $A \subseteq B$, то $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$.

Доказателство. Нека $C = B \setminus A$.

Тогава $A \cap C = \varnothing \implies \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A \cup C) = \mathrm{P}(B)$.

Вероятността $\mathrm{P}(C)$ е неотрицателна, следователно $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$. □

1.1.2. Субадитивност

Ако $A \subseteq \bigcup_i A_i$, то $\mathrm{P}(A) \leq \sum_i \mathrm{P}(A_i)$.

Доказателство. Нека за цели $n > 0$ дефинираме $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$ и нека $B_0 = A_0$. Очевидно $\bigcup_i B = \bigcup_i A$ и, освен това, множествата B_n са дизюнктивни. Следователно $\mathrm{P}(\bigcup_i A_i) = \mathrm{P}(\bigcup_i B_i) = \sum_i \mathrm{P}(B_i)$.

Но от задача 1.1.1 знаем, че ако $A \subseteq \bigcup_i A_i = \bigcup_i B_i$, то $\mathrm{P}(A) \leq \sum_i \mathrm{P}(B_i) = \sum_i \mathrm{P}(A_i)$.

□

1.1.3. Непрекъснатост отдолу

Ако $A_i \uparrow A$, то $\mathrm{P}(A_i) \uparrow \mathrm{P}(A)$.

Доказателство. Нека $B_i = A \setminus A_i$.

$$A_i \subseteq A_{i+1} \implies B_i \supseteq B_{i+1} \implies B_i \downarrow \varnothing \implies \mathrm{P}(B_i) \downarrow 0.$$

За всяко i вероятността $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_i) + \mathrm{P}(B_i)$. Асимптотично:

$$\mathrm{P}(A) = \lim_{i\to\infty} \mathrm{P}(A_i + \underset{\substack{\| \\ \varnothing}}{B_i}) = \lim_{i\to\infty} \mathrm{P}(A_i),$$

тоест $\mathrm{P}(A_i) \uparrow \mathrm{P}(A)$.

□

1.1.4. Непрекъснатост отгоре

Ако $A_i \downarrow A$, то $\mathrm{P}(A_i) \downarrow \mathrm{P}(A)$.

Доказателство. Нека $B_i = A_i \setminus A$.

$$A_i \supseteq A_{i+1} \implies B_i \supseteq B_{i+1} \implies B_i \downarrow \varnothing \implies \mathrm{P}(B_i) \downarrow 0.$$

За всяко i вероятността $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_i) - \mathrm{P}(B_i)$. Асимптотично:

$$\mathrm{P}(A) = \lim_{i\to\infty} \mathrm{P}(A_i - \underset{\varnothing}{\underset{\shortparallel}{B_i}}) = \lim_{i\to\infty} \mathrm{P}(A_i),$$

тоест $\mathrm{P}(A_i) \downarrow \mathrm{P}(A)$.

$\square$

Задача 1.2

Да се покаже, че Поасоновите, биномните и отрицателните биномни случайни величини са безгранично делими.

1.2.1. Поасонова безгранична делимост

Доказателство. Нека $\lambda \in \mathbb{R}^+$ и $X \in \mathrm{Po}(\lambda)$. За неотрицателни цели k

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

Характеристичната функция на X е

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{itk-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = \exp(\lambda e^{it} - \lambda).$$

За всяко положително цяло n функцията $\sqrt[n]{\varphi_X(t)}$ е характеристична за $\mathrm{Po}(\frac{\lambda}{n})$-разпределена случайна величина, следователно разпределението на Поасон е безгранично делимо.

$\square$

1.2.2. Биномна безгранична делимост

Доказателство. Нека $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in (0,1)$ и $X \in \mathrm{Bi}(n,p)$. За $k \in 0, \dots, n$

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Характеристичната функция на X е

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{itk} p^k (1-p)^{n-k} = (pe^{it} + 1 - p)^n.$$

За всеки положителен делител m на n функцията $\sqrt[m]{\varphi_X(t)}$ е характеристична за $\mathrm{Bi}(\frac{n}{m}, p)$-разпределена случайна величина. Ако $m = n$, то полученото разпределение е Бернулиево и е неразложимо, следователно X не може да се представи като сума от повече от n случайни величини. Това доказва, че биномното разпределение не е безгранично делимо.

$\square$

1.2.3. Отрицателна биномна безгранична делимост

Доказателство. Нека $X \in \mathrm{NBi}_1(r, p)$. За $k \in r, \dots, \infty$

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

Отрицателното биномно разпределение е сума от r $\mathrm{Ge}_1(p)$ разпределения. Следователно характеристичната функция на X е произведение на характеристичните им функции. Нека $\{Y_r\}_{k=1}^n$ са независими $\mathrm{Ge}_1(p)$-разпределени случайни величини.

Характеристичната функция на Y_k е

$$\varphi_{Y_k}(t) = pe^{it} \sum_{m=1}^{\infty} e^{it(m-1)}(1-p)^{m-1} = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}.$$

Сборът $\sum_{k=1}^r Y_k = X$ има ХФ

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}\right)^r.$$

Нека сега обобщим отрицателното биномно разпределение използвайки гама функции ($\mathrm{NBiGamma_1(r,p)}$) и нека Z има такова разпределение. Функцията на вероятностите на Z е

$$\mathrm{P}(Z = k) = \frac{k!}{\Gamma(r)\Gamma(k-r+1)} p^r (1-p)^{k-r}.$$

Според обобщената биномна теорема, редът $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(Z = r + k)$ схожда към 1, тоест $\mathrm{NBiGamma_1(r,p)}$ е добре дефинирано разпределение.

За всяко положително цяло n функцията $\sqrt[m]{\varphi_Z(t)}$ е характеристична за $\mathrm{NBiGamma}_1(\frac{r}{m}, p)$-разпределена случайна величина, което прави разпределенията NBi_1 и $\mathrm{NBiGamma}_1$ безгранично делими.

$\square$

Задача 1.3

Нека $X \in \mathrm{Ge}_0(p)$, $0 \le p \le 1$. Да се покаже липсата на памет

$$\mathrm{P}(X \ge n + m | X \ge m) = \mathrm{P}(X \ge n),\ n, m \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Решение. Функцията на разпределение на X има вида

$$\mathrm{P}(X \leq n) = \sum_{k=0}^{n} p(1-p)^k = 1 - (1-p)^{n+1},$$

следователно опашката е $\mathrm{P}(X \geq n) = (1-p)^n$.

Доказателство на (1). Понеже $\mathrm{P}(X \geq n+m, X \geq m) = \mathrm{P}(X \geq n+m)$,

$$\mathrm{P}(X \geq n+m | X \geq m) = \frac{\mathrm{P}(X \geq n+m)}{\mathrm{P}(X \geq m)} = \frac{(1-p)^{n+m}}{(1-p)^n} = (1-p)^n = \mathrm{P}(X \geq n).$$

□

Задача 1.4

Нека X и $Y \in \mathrm{Ge}_0(p)$, $0 \leq p \leq 1$ са независими и $Z = X + Y$ е сборът им.

1.4.1.

Да се намери $\mathrm{P}(Z = k)$ за естествени k.

Решение.

$$\mathrm{P}(Z=k) = \mathrm{P}(X = k - Y) = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{P}(X = k-i)\mathrm{P}(Y = i) = p^2 \sum_{i=0}^{k} (1-p)^{k-i}(1-p)^i =$$
$$= p^2 \sum_{i=0}^{k} (1-p)^k = (k+1)p^2(1-p)^k.$$

1.4.2.

Да се намери условната вероятност $\mathrm{P}(X = m | X + Y = k)$, $m \in 0, \dots, k$.

Решение.

$$\mathrm{P}(X = m | X+Y = k) = \frac{\mathrm{P}(X = m, X+Y = k)}{\mathrm{P}(X+Y = k)} = \frac{\mathrm{P}(X+Y = k | X = m)\mathrm{P}(X = m)}{\mathrm{P}(Z = k)} =$$
$$= \frac{\mathrm{P}(Y = k-m)\mathrm{P}(X = m)}{\mathrm{P}(Z = k)} = \frac{p(1-p)^{k-m} p(1-p)^m}{p^2(1-p)^k(k+1)} = \frac{1}{k+1}$$

Задача 1.5

Нека $\{X_k\}_{k=1}^n$ са независими $\mathrm{Ge}_0(p_k)$-разпределени случайни величини и $m_n = \min\limits_{1\leq k\leq n} X_k$. Да се покаже

$$m_n \in \mathrm{Ge}_0(p), p = \prod_{k=1}^{n} p_k. \tag{1}$$

Решение. За да бъде m_n минимум, всички $\{X_k\}_{k=1}^n$ трябва да бъдат не по-малки от m_n, или, еквивалентно, $\mathrm{P}(X_0 \geq, \ \dots, X_k \geq x) = S_{m_n}(k) = \prod S_{X_k}(k)$, където $S_\bullet(k)$ са функция на оцеляване ($S_\bullet(k) = 1 - F_\bullet(k)$). Ще докажем, че (1) е грешно.

Опровержение на (1).

$$S_{m_n}(k) = \prod_{i=1}^{n} S_{X_i}(k) = \prod_{i=1}^{n}(1-p_i)^{k-1} = \left(\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)\right)^{k-1} = \left(1 - 1 + \prod_{i=1}^{n}(1-p_i)\right)^{k-1},$$

следователно $m_k \in \mathrm{Ge}_0(1 - \prod_{k=1}^{n}(1-p_k))$.

□

Задача 1.6

Да се покаже, че опашката на биномното разпределение има вида

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = m\binom{n}{m}\int_0^p x^{m-1}(1-x)^{n-m}dx. \tag{1}$$

Решение. Нека $X \in \mathrm{Bi}(n,p)$ и $Y \in \mathrm{Beta}(m, n-m+1)$. Тогава равенство (1) е еквивалентно на

$$\mathrm{P}(X \geq m) = \sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \\ = \frac{1}{B(m, n-m+1)}\int_0^p x^{m-1}(1-x)^{n-m}dx = \mathrm{P}(Y \leq p) \tag{2}$$

Плътността на Y има целочислени параметри и може да се интегрира краен брой пъти по части. За целта нека докажем следната лема:

Лема 1. *Нека $\xi \in \mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$ и $\eta \in \mathrm{Bi}(\alpha+\beta-1, p)$, където α и β са естествени и $0 < p < 1$. Тогава $\mathrm{P}(\xi \leq p) = \mathrm{P}(\eta \geq \alpha)$.*

Доказателство. Нека дефинираме спомагателната функция

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^p x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

Ще интегрираме I по части.

$$\begin{cases} d\Big((1-x)^{\beta-1}\Big) = -(\beta-1)(1-x)^{\beta-2}dx, \\ \displaystyle\int_0^p x^{\alpha-1}dx = \frac{p^\alpha}{\alpha}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I(\alpha,\beta) = \frac{p^\alpha}{\alpha}(1-p)^{\beta-1} + \frac{\beta-1}{\alpha}\int_0^p x^\alpha(1-x)^{\beta-2}dx = \\ = \frac{p^\alpha}{\alpha}(1-p)^{\beta-1} + \frac{\beta-1}{\alpha}I(\alpha+1,\beta-1). \end{aligned}$$

Развивайки рекурентното отношение получаваме

$$I(\alpha,\beta) = \sum_{k=0}^{\beta-1}\frac{(\alpha-1)!(\beta-1)!}{(\alpha+k)!(\beta-k-1)!}p^{\alpha+k}(1-p)^{\beta-k-1},$$

което ни дава следната връзка между функцията на разпределение на ξ и функцията на оцеляване на η

$$\begin{aligned} F_\xi(p) = \mathrm{P}(\xi \le p) = \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!}\sum_{k=0}^{\beta-1}\frac{(\alpha-1)!(\beta-1)!}{(\alpha+k)!(\beta-k-1)!}p^{\alpha+k}(1-p)^{\beta-k-1} = \\ = \sum_{k=0}^{\beta-1}\binom{\alpha+\beta-1}{\alpha+k}p^{\alpha+k}(1-p)^{\beta-k-1} = \\ = \sum_{k=\alpha}^{\alpha+\beta-1}\binom{\alpha+\beta-1}{k}p^k(1-p)^{\alpha+\beta-1-k} = \mathrm{P}(\eta \ge \alpha) = S_\eta(\alpha-1). \end{aligned}$$

□

Тогава (2) е пряко следствие от Лема 1.

Задача 1.7

Нека $X \in \mathrm{NBi}_1(\alpha_1,p)$ и $X \in \mathrm{NBi}_1(\alpha_2,p)$ са независими случайни величини и $Z = X+Y$. Да се покаже, че $Z \in \mathrm{NBi}_1(\alpha_1+\alpha_2,p)$.

Решение. Ще използваме характеристични функции.

Доказателство. От задача 1.2.3 знаем, че отрицателното биномно разпределение има ХФ

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}\right)^{\alpha_1}.$$

Тогава

$$\varphi_Z(t) = \left(\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}\right)^{\alpha_2} = \left(\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}$$

□

Задача 1.8

Нека $X \in \mathrm{NBi}_0(n,p)$. Да се покаже, че опашката на разпределението има вида

$$\mathrm{P}(X \geq m) = \sum_{k=m}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}(1-p)^n p^k = m\binom{m+n-1}{m}\int_0^p x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx. \quad (1)$$

Решение. *Доказателство.* Нека $Y \in \mathrm{Bi}(m+n-1,p)$ за фиксирано $m \leq n$. Лема 1 от 1.6 ни позволява да запишем (1) в следния вид:

$$\mathrm{P}(X \geq m) = \mathrm{P}(Y \geq m).$$

$\mathrm{P}(Y \geq m)$ изразява вероятността от $n+m-1$ опита да имаме поне m успеха и по-малко от n неуспеха. Но вероятността за поне m успеха преди настъпването на n неуспеха има отрицателно биномно разпределение с параметри n и p. Следователно (1) е изпълнено.

□

Задача 1.9

Нека $X \in \mathrm{Po}(\lambda)$. Да се покаже, че за всяко положително цяло m опашката на разпределението има вида

$$\mathrm{P}(X \geq m) = \sum_{k=m}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}dx = \int_0^{\lambda}\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}e^{-x}dx.$$

Решение. Ще докажем лявата част на (1.9), тръгвайки от дясната, чрез интегриране по части.

Доказателство.

$$\mathrm{P}(X \geq m) = \int_0^{\lambda}\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}e^{-x}dx,$$

$$\begin{cases} d(e^{-x}) = -e^{-x}dx \\ \displaystyle\int_0^{\lambda} x^{m-1}dx = \frac{\lambda^m}{m}, \end{cases}$$

$$\mathrm{P}(X \geq m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} + \frac{1}{m!}\int_0^{\lambda}\lambda^m e^{-\lambda} = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} + \mathrm{P}(X \geq m+1).$$

Като развием рекурентното отношение, получаваме $\mathrm{P}(X \geq m) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

$\square$

Задача 1.10

Да се покаже, че ако X и Y са независими и $X \in \mathrm{Po}(\lambda)$ и $Y \in \mathrm{Po}(\mu)$, то $Z = X + Y \in \mathrm{Po}(\lambda + \mu)$

Решение. Ще използваме равенство на характеристични функции.

Доказателство. ХФ на X е

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{itk} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = \exp(-\lambda + \lambda e^{it}) = \exp(\lambda(e^{it} - 1)).$$

ХФ на Z е произведение от ХФ на X и Y:

$$\varphi_Z(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1)) \exp(\mu(e^{it} - 1)) = \exp((\lambda + \mu)(e^{it} - 1)),$$

което е ХФ на Поасоново разпределение с параметър $\lambda + \mu$.

$\square$

Задача 1.11

Нека случайните величини X и Y са независими и $X \in \mathrm{Po}(\lambda)$ и $Y \in \mathrm{Po}(\mu)$. Да се намери условното разпределение на X при условие $Z = X + Y$.

Решение. Нека $k \in \mathbb{N}$. От теоремата на Бейс получаваме

$$\mathrm{P}(X = k | X + Y = n) = \frac{\mathrm{P}(X + Y = n | X = k)\mathrm{P}(X = k)}{\mathrm{P}(X + Y = n)} = \frac{\mathrm{P}(Y = n - k)\mathrm{P}(X = k)}{\mathrm{P}(X + Y = n)} =$$
$$= \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}\cancel{e^{-\mu}} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\cancel{e^{-\lambda}} \Big/ \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!}\cancel{e^{-(\lambda+\mu)}} = \binom{n}{k} \frac{\mu^{n-k}\lambda^k}{(\lambda + \mu)^n}.$$

2. Обобщени разпределения

Задача 2.1

Нека $\{X_k\}_1^{\infty}$ са независими Bernoulli(p)-разпределени случайни величини и нека $N \in \mathrm{Po}(\lambda)$ е независима от тях. Да се намери разпределението на $S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k$.

Решение. Сумата $\sum_{k=1}^{n} X_k$ е $\mathrm{Bi}(n, p)$ случайна величина (за фиксирани n). Разпределението на S_n е сложно Поасоново. Следователно за $n \in \mathbb{N}$ функцията на вероятностите на S_N придобива вида

$$\mathrm{P}(S_N = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(S_N = k | N = n)\mathrm{P}(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

Задача 2.2

Нека X е случайна величина с цели неотрицателни стойности с вероятности $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$, такива че пораждащата функция $\mathrm{PGF}_X(t)$ има радиус на сходимост $t_0 \geq 1$. Да се покаже, че

$$(1-t)\sum_{k=0}^{\infty} r_{k+1}t^k = 1 - \mathrm{PGF}_X(t),\, |t| < t_0,$$

където r_k е опашката на X ($r_k = \sum_{i=k}^{\infty} p_i$).

Решение. *Доказателство.* Нека $|t| < t_0$.
Преобразуваме лявата страна на (2.2):

$$L = (1-t)\sum_{k=0}^{\infty} r_{k+1}t^k = \sum_{k=0}^{\infty} r_{k+1}t^k - \sum_{k=1}^{\infty} r_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty}(r_k - p_k)t^k - \sum_{k=1}^{\infty} r_k t^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} r_k t^k - \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k - \sum_{k=1}^{\infty} r_k t^k = r_0 t^0 - \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k.$$

Но $r_0 = \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$. Следователно $L = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k$.
Дясната страна на (2.2) има вида $R = 1 - \mathrm{PGF}_X(t) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k$.
Очеведно L и R (двете страни на (2.2)) са равни.

□

Задача 2.3

2.3.1.

Да се покаже, че ако X е случайна величина с цели неотрицателни стойности, то

$$\mathbb{E}X = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(X > n). \tag{1}$$

Решение. *Доказателство.* Ще получим лявата страна на (1) от дясната.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(X > n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X = k) + \sum_{k=2}^{\infty} \mathrm{P}(X = k) \ldots =$$
$$= \mathrm{P}(X = 1) + 2\mathrm{P}(X = 2) + 3\mathrm{P}(X = 3) \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{P}(X = k) = \mathbb{E}X$$

□

2.3.2.

Да се покаже, че ако X е неотрицателна, непрекъсната случайна величина, то

$$\mathbb{E}X = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(X > n). \tag{2}$$

Решение. *Доказателство.* Ще получим лявата страна на (2) от дясната.

$$\int_0^\infty \mathrm{P}(X > x)dx = \int_0^\infty \int_x^\infty \mathrm{P}\{\omega | X(\omega) \in dy\}dydx =$$
$$= \int_0^\infty \left(\int_0^y dx\right) \mathrm{P}\{\omega | X(\omega) \in dy\}dy = \mathbb{E}X$$

□

Задача 2.4

Нека X и Y са независими, Exp(1)-разпределени случайни величини. Да се намери разпределението на $Z = X/Y$.

Решение. Ще означаваме с $D \coloneqq [0, \infty)^2$ (декартово произведение на интервали). Съвместната плътност на X и Y тогава има вида

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = e^{-(x+y)}\mathrm{I}_D(x,y).$$

Ще намерим биекция за $T(X,Y) = (Z, \cdot)$.

Нека $U = X + Y$. Тогава X придобива вида

$$\begin{aligned}
X &= -Y + U = -\frac{X}{Z} + U, \\
X &+ \frac{X}{Z} = U, \\
X&\left(\frac{Z+1}{Z}\right) = U, \\
X &= \frac{UZ}{Z+1},
\end{aligned}$$

а $Y = \dfrac{X}{Z} = \dfrac{U}{Z+1}$.

Якобиана на трансформацията е

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{Z}{Z+1} & \dfrac{U}{(Z+1)^2} \\ \dfrac{1}{Z+1} & \dfrac{-U}{(Z+1)^2} \end{vmatrix} = -\frac{UZ}{(Z+1)^3} - \frac{U}{(Z+1)^3} = -\frac{U(Z+1)}{(Z+1)^3} = -\frac{U}{(Z+1)^2}.$$

u и v са положителни, следователно $|J| = \dfrac{u}{(z+1)^2}$.

Плътността на U и Z е

$$f_{U,Z}(u,z) = |J| f_{X,Y}\left(\frac{zu}{z+1}, \frac{u}{z+1}\right) = \mathrm{I}_D(u,z) \cdot \frac{u}{(z+1)^2} e^{u\cancel{(z+1)}/\cancel{(z+1)}} = \mathrm{I}_D(u,z) \cdot \frac{1}{(z+1)^2} \cdot u e^u,$$

а маргиналната плътност на Z е $f_Z(z) = \dfrac{\mathrm{I}_{(0,\infty)}(z)}{(z+1)^2}$.

Задача 2.5

Нека X и Y са независими, Exp(1)-разпределени случайни величини. Да се докаже, че

$$Z = \frac{X}{X+Y}$$

е равномерно разпределена в единичния интервал.

Решение. Ще докажем, че функцията на разпределение на Z е равномерна.

Доказателство.

$$\begin{aligned} F_Z(z) = \mathrm{P}\left(\frac{X}{X+Y} \le z\right) &= \mathrm{P}\left(\frac{X+Y}{X} \ge \frac{1}{z}\right) = \mathrm{P}\left(Y \ge \frac{X}{z} - X\right) = \\ &= 1 - \mathrm{P}\left(Y \le \frac{X}{z} - X\right) = 1 - \int_0^\infty F_Y(x/z - x) f_X(x) dx = \\ &= 1 - \int_0^\infty (1 - e^{-x/z} e^x) e^{-x} dx = 1 - \int_0^\infty e^{-x} dx - z \int_0^\infty e^{-x/z} d(x/z) = z. \end{aligned}$$

Носителят $[0,1]$ на Z може да се определи от изискванията $\lim_{z\to-\infty} F_Z(z) = 0$ и $\lim_{z\to\infty} F_Z(z) = 1$.

□

Задача 2.6

Нека X и Y са независими, Exp(1)-разпределени случайни величини. Да се докаже, че $W = X - Y$ има стандартно разпределение на Лаплас с плътност

$$f_W(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

Решение. *Доказателство.* Плътността на X е

$$f_X(x) = e^{-x} \mathrm{I}_{[0,\infty)}(x).$$

Плътността на $-Y$ е

$$f_{-Y}(y) = e^y \mathrm{I}_{(-\infty,0]}(y).$$

Плътността на Z е

$$f_Z(z) = \int_0^\infty e^{-x} f_{-Y}(z-x)dx = \begin{cases} \displaystyle\int_z^\infty e^{-x}e^{z-x}dx, = \frac{1}{2}e^{-z} & z \geq 0 \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}e^{z-x}dx = \frac{1}{2}e^{z}, & z < 0 \end{cases} = \frac{1}{2}e^{-|z|}$$

□

Задача 2.7

Нека $X \in \mathrm{Exp}(1)$ и $Y \in \mathrm{Exp}(\lambda)$ са независими. Да се намери стойността на λ, за която $\mathrm{P}(X \geq Y) = \frac{1}{3}$.

Решение. Нека първо намерим $\mathrm{P}(X \geq Y)$:

$$\mathrm{P}(X \geq Y) = \mathrm{P}(Y \leq X) = \int_0^\infty F_Y(x) f_X(x)dx = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) f_X(x)dx =$$
$$= \int_0^\infty e^{-x}dx - \int_0^\infty e^{-x(\lambda+1)}dx = 1 - \frac{1}{\lambda+1} = \frac{\lambda}{\lambda+1}.$$

Решаваме уравнението

$$\mathrm{P}(X \geq Y) = \frac{1}{3},$$
$$3\lambda = \lambda + 1,$$
$$\lambda = \frac{1}{2}.$$

Задача 2.8

Нека $Y \in \mathrm{Exp}(\lambda)$. Известно е, че Лапласовата трансформация на Y е $\Lambda_Y(t) = \frac{\lambda}{\lambda+t}$. Да се намери Лапласовата трансформация на случайната величина $V = \alpha + Y$.

Решение.

$$\Lambda_V(t) = \mathbb{E}e^{-t(\alpha+Y)} = \mathbb{E}e^{-t\alpha}\mathbb{E}e^{-tY} = e^{-t\alpha}\Lambda_Y(t) = \frac{e^{-t\alpha}\lambda}{\lambda+t}.$$

Задача 2.9

Нека $Y_k \in \mathrm{Exp}(\lambda_k)$ са независими случайни величини и $m_n = \min_{k \leq n} Y_k$. Да се покаже, че за всяко цяло $n \geq 1$, m_n е експоненциално разпределено с параметър $\lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k$.

Решение. *Доказателство.* Функцията на оцеляване на m_n има вида

$$S_{m_n}(x) = \mathrm{P}(m_n > x) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \{\omega | Y_k(\omega) > x\}\right) = \prod_{k=1}^{n} S_{Y_k}(x) = \prod_{k=1}^{n} e^{-x\lambda_k} = \\ = \exp\left(-x\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right),$$

което е функция на оцеляване на $\mathrm{Exp}(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k)$-разпределена случайна величина.

□

Задача 2.10

Нека $\{Y_k\}_1^\infty$ са независими, еднакво разпределени случайни величини. Да се покаже, че свойството

$$\min_{k \le n} Y_k \overset{d}{=} \frac{Y_1}{n} \tag{1}$$

за цели положителни n е в сила тогава и само тогава, когато Y_k е експоненциално разпределено за всяко $k \in 1, \dots, \infty$.

Решение. Нека $m_n = \min_{k \le n} Y_k$.

Първо ще докажем, че ако Y_k са експоненциално разпределени, то $m_n \overset{d}{=} \frac{Y_1}{n}$.

Доказателство. От (2.9) знаем, че $m_n \in \mathrm{Exp}(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k) = \mathrm{Exp}(n\lambda)$. Но $\frac{Y_1}{n}$ има същото разпределение. Наистина,

$$f_{\frac{Y_1}{n}}(y) = f_{Y_1}(ny)$$

е плътност на $\mathrm{Exp}(n\lambda)$-разпределена случайна величина.

□

Сега ще докажем, че (1) важи само за експоненциални случайни величини.

Доказателство. Нека $S_k(y)$ е функцията на оцеляване на m_k.:

За да бъде изпълнено (1), трябва да бъдат равни функциите на оцеляване на m_n и $\frac{Y_1}{n}$, тоест трябва да бъде изпълнено $S_n(y) = S_{Y_1}(ny)$. Но S_n е функция на оцеляване на минимум от независими случайни величини. Понеже Y_k са независими, функцията на оцеляване на m_k можем да запишем в следния вид

$$S_n(y) = \prod_{k=1}^{n} S_{Y_k}(y).$$

Понеже Y_k са еднакво разпределени, функциите им на оцеляване са равни. Тоест

$$S_n(y) = S_{Y_1}^n(y).$$

Но за да бъде изпълнено (1), трябва $S_{Y_1}^n(y)$ и $S_{Y_1}(ny)$ да бъдат равни. А това свойство е налично само при показателните функции. Тоест $S_{Y_1}(y) = e^{ay}$ за реални a и b.

Остава да проверим за кои стойности на a са изпълнени аксиомите за функция на разпределение. За Y_1 ФР има следния вид:

$$F_{Y_1}(y) = 1 - S_{Y_1}(y) = 1 - e^{ay}.$$

- $0 \leq F_{Y_1}(y) \leq 1$

  $$\begin{aligned} 0 &\leq 1 - e^{ay} \leq 1 |(\text{ изваждаме } -1 \text{ от двете страни}), \\ -1 &\leq -e^{ay} \leq 0|(-1), \\ 0 &\leq e^{ay} \leq 1|\ln, \\ -\infty &< ay \leq 0. \end{aligned}$$

  За да попада ay в интервала $(-\infty, 0]$, a и y трябва да имат различни знаци. Нека за определеност $a < 0$ и $y \geq 0$. За $y < 0$ искаме $F_{Y_1}(y)$ да бъде тъждествено нула.

- $F_{Y_1}(y)$ е монотонно растяща

  Ако $a < 0$ то $F_{Y_1}(y)$ е строго монотонно растяща при $y \in [0, \infty)$.

- $F_{Y_1}(y)$ е непрекъсната отдясно

  Всички показателни функции са непрекъснати.

- $\lim_{y \to -\infty} F_{Y_1}(y) = 0$

  Това е тривиално, тъй като дефинирахме $F_{Y_1}(y)$ така, че за отрицателни стойности на y функцията да бъде тъждествено нула.

- $\lim_{y \to \infty} F_{Y_1}(y) = 1$

  Тъй като $a < 0$,

$$\lim_{y \to \infty} F_{Y_1}(y) = 1 - \lim_{y \to \infty} e^{ay} = 1.$$

Както видяхме, при $a < 0$

$$F_{Y_1}(y) = \begin{cases} 1 - e^{ay}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

е валидна ФР. Но това е и ФР на експоненциалното разпределение.

□

Задача 2.11

Нека $X \in \text{Exp}(1)$. Да се покаже, че случайната величина $W = \sigma X^{\frac{1}{\beta}}$ има разпределение на Вайбул с параметри β и α.

Решение. *Доказателство.* Първо нека изразим X чрез W:

$$\begin{aligned}
\sigma X^{\frac{1}{\beta}} &= W, \\
X^{\frac{1}{\beta}} &= \frac{W}{\sigma}, \\
X &= \left(\frac{W}{\sigma}\right)^{\beta}.
\end{aligned}$$

За функцията на разпределението на W получаваме при $x \geq 0$

$$F_W(w) = F_X\left(\left(\frac{w}{\sigma}\right)^{\beta}\right) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{w}{\sigma}\right)^{\beta}\right),$$

което е ФР за разпределение на Вайбул.

□

Задача 2.12

Нека $\{X_k\}_1^n$ са независими $\text{Gamma}(\alpha_k, \beta)$-разпределени случайни величини. Да се покаже, че $X = \sum_{k=1}^n X_k \in \text{Gamma}(\sum_{k=1}^n \alpha_k, \beta)$.

Решение. Ще използваме характеристични функции.

Доказателство. ХФ на X_k е

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_k}(t) = \frac{\beta^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k, \beta)} \int_0^{\infty} e^{itx} e^{-\beta x} x^{\alpha_k - 1} \beta^{\alpha_k} dx = \\
= \frac{\beta^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k, \beta)(\beta - it)^{\alpha_k - 1}} \int_0^{\infty} e^{-x(\beta - it)} (\beta x - itx)^{\alpha_k - 1} \beta^{\alpha_k} dx = \\
= \cancel{\frac{\Gamma(\alpha_k, \beta)}{\Gamma(\alpha_k, \beta)}} \frac{\beta^{\alpha_k}}{(\beta - it)^{\alpha_k}}.
\end{aligned}$$

ХФ на X е

$$\varphi_X(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^n \frac{\beta^{\alpha_k}}{(\beta - it)^{\alpha_k}} = \frac{\beta^{\alpha}}{(\beta - it)^{\alpha}},$$

където $\alpha = \sum_{k=1}^n \alpha_k$.

□

Задача 2.13

Нека $X \in \mathrm{Gamma}(\alpha, 1)$ и $Y \in \mathrm{Gamma}(\beta, 1)$ са независими. Да се покаже, че случайните величини $U = \frac{X}{X+Y}$ и $V = X + Y$ са независими и $U \in \mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$ и $V \in \mathrm{Gamma}(\alpha + \beta, 1)$.

Решение. Ще покажем, че плътността на съвместното разпределение на U и V може еднозначно да представим като произведение на две независими плътности, откъдето ще следва независимостта на U и V. Намерените плътности ще покажем, че съвпадат с търсените.

Доказателство. Съвместната плътност на X и Y има вида

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{x^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-(x+y)}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \frac{x^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-(x+y)}}{B(\alpha, \beta)\Gamma(\alpha + \beta)}, \, x, y \geq 0.$$

Трансформацията $T(X, Y) = (U, V)$ е биекция с обратна трансформация

$$\begin{aligned} V &= X + Y, \\ Y &= V - X, \\ Y &= V - UV, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} U &= \frac{X}{X + Y}, \\ U &= \frac{X}{X + (V - X)}, \\ X &= UV. \end{aligned}$$

Съвместната плътност на U и V

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) = \left\| \begin{vmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{vmatrix} \right\| f_{X,Y}(uv, v - uv) = v \frac{(uv)^{\alpha-1}(v - uv)^{\beta-1} e^{-v}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \\ = \frac{u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \cdot \frac{v^{\alpha+\beta-1} e^{-v}}{\Gamma(\alpha + \beta)}, \, 0 \leq u \leq 1, \, v \geq 0. \end{aligned}$$

можем еднозначно да представим като произведение на плътностите

$$f_U(u) = \mathrm{I}_{[0,1]}(u) \frac{u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$$

и

$$f_V(v) = \mathrm{I}_{\mathbb{R}+}(v) \frac{v^{\alpha+\beta-1} e^{-v}}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

които са плътности на съответно $\mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$ и $\mathrm{Gamma}(\alpha + \beta, 1)$ разпределения.

□

Задача 2.14

(Продължение на 2.13) Да се покаже, че от независимостта на $U = \frac{X}{X+Y}$ и $V = X+Y$ следват

2.14.1.

Независимост на $X+Y$ и $\dfrac{Y}{X}$.

Доказателство. Нека $A=\frac{Y}{X}=\left(\frac{X}{Y}\right)^{-1}$. Но $U=1+\frac{X}{Y}=1+A^{-1}$ и, освен това, U и V са независими, следователно V и A също са независими.

□

2.14.2.

Независимост на $X+Y$ и $\dfrac{X-Y}{Y}$.

Доказателство. Нека $A=\frac{X-Y}{Y}=\frac{X}{Y}-1=U-2$. Но V и U са независими, следователно V и също са независими.

□

2.14.3.

Независимост на $X+Y$ и $\dfrac{X^2+Y^2}{XY}$.

Доказателство. Нека $A=\frac{X^2+Y^2}{XY}=\frac{X}{Y}+\frac{Y}{X}=U-1+(U-1)^{-1}$. Но V и U са независими, следователно V и също са независими.

□

2.14.4.

Независимост на $(X+Y)^2$ и $\frac{(X+Y)^2}{XY}$.

Доказателство. Нека $A=\frac{(X+Y)^2}{XY}=\frac{X^2+Y^2}{XY}-2$, което по резултатите от 2.14.3 е независимо от V и съответно V^2. □

Задача 2.15

2.15.1. Да се покаже, че ако $X \in \mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$, то $1-X \in \mathrm{Beta}(\beta,\alpha)$

Доказателство. Нека $Y=1-X$. Плътността на Y за $0\le x\le 1$ е

$$f_Y(x)=f_X(1-x)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}(1-x)^{\alpha-1}x^{\beta-1}dx.$$

От симетричността на бета функцията следва, че $Y\in B(\beta,\alpha)$.

□

2.15.2.

Да се намери разпределението на $Y = \dfrac{1}{X}$.

За реални $x > 1$ плътността на Y има вида

$$f_Y(x) = x^{-2} f_X(x^{-1}) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{-(\alpha-1)-2} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{\beta-1} dx = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{-(\alpha+\beta)} (x-1)^{\beta-1} dx.$$

2.15.3.

Да се намери разпределението на $Z = Y - 1$.

За реални $x > 0$ плътността на Z има вида

$$f_Z(x) = f_Y(x+1) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} (x+1)^{-(\alpha+\beta)} x^{\beta-1} dx.$$

Задача 2.16

Нека $X \in \mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$. Да се покаже, че за цели $n > 2$, X може да се представи във вида

$$X = \left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{1}$$

където X_k, $k \in 1, \dots, n$ са независими $\mathrm{Beta}(\frac{\alpha+k-1}{n}, \frac{\beta}{n})$ разпределени случайни величини.

Решение. Нека n е фиксирано.

$\ln(x)$ еднозначно изобразява носителя на бета разпределението $(0, 1)$ в $(-\infty, 0)$, тоест разпределението на Y еднозначно определя това на X. Логаритмичното свойство $(\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b))$ ни позволява да запишем (1) във вида

$$\ln(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(X_k). \tag{2}$$

Нека с φ_X да бележим характеристичната функция на X. Така получаваме

$$\varphi_{\ln(X)}(t) = \mathbb{E} \exp(it \ln(X)) = \mathbb{E} \exp\left(\frac{it}{n} \ln \prod_{k=1}^{n} x_k\right),$$

$$\mathbb{E} X^{it} = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{it}{n}},$$

$$\mathbb{E} X^{it} = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E} X_k^{\frac{it}{n}}. \tag{3}$$

Тъй като характеристичната функция определя еднозначно функция на разпределение, (3) е еквивалентно на (2) и $\mathbb{E}X^{it}$ еднозначно определя разпределението на X. Ще бъде доказано тъждество (3).

Доказателство. Трансформацията $\mathbb{E}X^{it}$ е

$$\mathbb{E}X^{it} = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+it-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{B(\alpha+it,\beta)}{B(\alpha,\beta)}$$

Трансформацията $\mathbb{E}X_k^{\frac{it}{n}}$ е

$$\mathbb{E}X_k^{\frac{it}{n}} = \frac{B(\frac{\alpha+k-1+it}{n},\frac{\beta}{n})}{B(\frac{\alpha+k-1}{n},\frac{\beta}{n})}$$

Като заместим в дясната страна на (3) получаваме:

$$\prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}X_k^{\frac{it}{n}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{B(\frac{\alpha+k-1+it}{n},\frac{\beta}{n})}{B(\frac{\alpha+k-1}{n},\frac{\beta}{n})} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(\frac{\alpha+it}{n}+\frac{k-1}{n})\cancel{\Gamma(\frac{\beta}{n})}}{\Gamma(\frac{\alpha+\beta+it}{n}+\frac{k-1}{n})} = \frac{\Gamma(\frac{\alpha+\beta}{n}+\frac{k-1}{n})}{\cancel{\Gamma(\frac{\beta}{n})}\Gamma(\frac{\alpha}{n}+\frac{k-1}{n})} =$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{\alpha+it}{n}+\frac{k}{n})}{\Gamma(\frac{\alpha+\beta+it}{n}+\frac{k}{n})} = \frac{\Gamma(\frac{\alpha+\beta}{n}+\frac{k}{n})}{\Gamma(\frac{\alpha}{n}+\frac{k}{n})}.$$

Използваме мултипликативната теорема на Гаус за всяка от гама функциите:

$$\frac{\cancel{\sqrt{n}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} n^{-n(\alpha+it)}\Gamma(\alpha+it)}{\cancel{\sqrt{n}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} n^{-n(\alpha+\beta+it)}\Gamma(\alpha+\beta+it)} \frac{\cancel{\sqrt{n}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} n^{-n(\alpha+\beta)}\Gamma(\alpha+\beta)}{\cancel{\sqrt{n}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} n^{-n\alpha}\Gamma(\alpha)} =$$

$$= \cancel{n^0} \frac{\Gamma(\alpha+it)}{\Gamma(\alpha+\beta+it)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\Gamma(\alpha+it)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+it)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} = \frac{B(\alpha+it,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = \mathbb{E}X^{it}.$$

Това доказва (3) (и съответно (1)) за произволно фиксирано цяло $n > 2$.

□

Задача 2.17

Нека $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$ е редица от независими $\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$ разпределени случайни величини. Да се покаже, че

$$X \coloneqq \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \prod_{i=0}^{j} X_j \tag{1}$$

има $\mathrm{Beta}(\alpha,\alpha+\beta)$ разпределение.

Решение. Не е решена.

Задача 2.18

Нека $V \in \mathrm{Bi}(n, p)$ и $X \in \mathrm{Beta}(m, n-m+1)$, където $m \leq n$ са цели и $0 < p < 1$. Да се покаже, че

$$\mathrm{P}(V \geq m) = \mathrm{P}(X < p). \tag{1}$$

Решение. *Доказателство.* От Лема 1 от 1.6 получаваме, че $\mathrm{P}(X \leq p) = \mathrm{P}(V \geq m)$. Понеже бета разпределението е абсолютно непрекъснато, $\mathrm{P}(X \leq p)$ е еквивалентно на $\mathrm{P}(X < p)$.

□

Задача 2.19

Нека $X \in \mathrm{Cauchy}(\mu_1, \sigma_1)$ и $Y \in \mathrm{Cauchy}(\mu_2, \sigma_2)$ са независими случайни величини и $Z = X + Y$. Да се докаже, че $Z \in \mathrm{Cauchy}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1 + \sigma_2)$ с характеристична функция

$$\varphi_Z(t) = e^{it(\mu_1+\mu_2)-(\sigma_1+\sigma_2)|t|} \tag{1}$$

Решение. Първо ще докажем, че $e^{-|t|}$ е ХФ на $\mathrm{Cauchy}(0,1)$-разпределена случайна величина.

Доказателство. Нека $Z \in \mathrm{Cauchy}(0,1)$. Плътността на Z може да се изрази чрез характеристичната ѝ функция

$$2\pi f_Z(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi_Z(t)dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx-|t|}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-ix)}dt \int_{0}^{\infty} e^{-t(1+ix)}dt + =$$
$$= \frac{e^{t(1-ix)}}{(1-ix)}\Bigg|_{t\to-\infty}^{0} - \frac{e^{-t(1+ix)}}{(1+ix)}\Bigg|_{t=0}^{\infty} = \frac{e^{-t(1-ix)}}{(1-ix)}\frac{e^{-t(1+ix)}}{(1+ix)}\Bigg|_{t=0}^{\infty} = \frac{e^{-t}}{1+x^2}\Bigg|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{1+x^2},$$

което действително е плътността на Z. □

Параметризацията на $U \in \mathrm{Cauchy}(\mu, \sigma)$ с $\mu \geq 0$ и $\sigma \in \mathbb{R}$ може да се представи чрез $U = \mu + \sigma X$ и има плътност

$$\varphi_U(t) = e^{\mu - \sigma|t|}.$$

Малко по-общ резултат е следната лема:

Лема 2. *Нека $\xi \in \mathrm{Cauchy}(\mu, \sigma)$ и нека a и b са реални константи. Тогава $\eta = a\xi + b \in \mathrm{Cauchy}(a\mu + b, a\sigma)$.*

Доказателство. Нека $\zeta = \sigma^{-1}(\xi - \mu) \in \mathrm{Cauchy}(0,1)$ е нормираният еквивалент на ξ.

Тогава за η имаме

$$\eta = a\xi + b = a(\mu + \sigma\zeta) + b = (a\mu + b) + a\sigma\zeta \in \mathrm{Cauchy}(a\mu + b, a\sigma).$$

□

За доказателството на (1) ни трябва само да умножим ХФ на X и Y:

Доказателство.

$$\varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{it\mu_1 - \sigma_1|t|}e^{it\mu_2 - \sigma_2|t|} = e^{it(\mu_1+\mu_2)-(\sigma_1+\sigma_2)|t|} = \varphi_Z(t).$$

□

Задача 2.20

Нека $\{X_k\}_{k=1}^n$ са независими случайни величини и $X_k \in \mathrm{Cauchy}(\mu_k, \sigma_k)$. Да се покаже, че $X = \sum_k X_k \in \mathrm{Cauchy}(\mu, \sigma)$, където $\mu = \sum_k \mu_k$ и $\sigma = \sum_k \sigma_k$.

Решение. Ще използваме характеристични функции.

Доказателство.

$$\prod_{k=1}^n \varphi_{X_k} = \prod_{k=1}^n e^{it\mu_k - \sigma_k|t|} = \exp\left(it\sum_{k=1}^n \mu_k - \sum_{k=1}^n \sigma_k|t|\right) = e^{it\mu - \sigma|t|} = \varphi_X$$

□

Задача 2.21

Нека $\{X_k\}_1^n$ са независими случайни величини и $X_k \in \mathrm{Cauchy}(\mu, \sigma)$. Да се намери разпределението на $X = \sum_k \alpha_k X_k$, където α_k са положителни реални константи.

Решение. Нека $Y_k = \alpha_k X_k$ за всяко $k \in 1, \dots, n$. Тогава от Лема 2 от 2.18 получаваме, че $Y_k \in \mathrm{Cauchy}(\alpha_k\mu, \alpha_k\sigma)$ и от 2.19 знаем, че сумата $X \in \mathrm{Cauchy}(\mu\sum_k \alpha_k, \sigma\sum_k \alpha_k)$.

Задача 2.22

Да се покаже, че всяко едно разпределение на Коши е безгранично делимо.

Решение. *Доказателство.* Нека $X \in \mathrm{Cauchy}(\mu, \sigma)$. От 2.18 знаем, че ХФ на X е

$$\varphi_X(t) = e^{\mu - \sigma|t|} = \left(e^{\frac{\mu}{m} - \frac{\sigma}{m}|t|}\right)^m$$

за всяко положително цяло m, тоест можем да представим X като сума на m $\mathrm{Cauchy}(\frac{\mu}{m}, \frac{\sigma}{m})$-разпределени случайни величини. Следователно разпределението на Коши е безгранично делимо.

□

Задача 2.23

Да се докаже, че всяко едно разпределение на Коши е устойчиво.

Решение. Нека $\{X_k\}_1^n$ са независими, Cauchy(μ_k, σ_k)-разпределени случайни величини и нека $Y_k = (X_k - \mu_k){\sigma_k}^{-1}$ и нека $X = a + \sum \alpha_k X_k$ и за положителни реални константи α_k. За да бъде разпределението на Коши устойчиво, X също трябва да има разпределение на Коши.

Доказателство. X има вида

$$X = a + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k.$$

От Лема 2 от 2.18 получаваме, че $\alpha_k X_k \in \text{Cauchy}(\alpha_k \mu_k, \alpha_k \sigma_k)$ и от 2.19 знаем, че сумата $X \in \text{Cauchy}(a + \sum \mu_k \alpha_k, \sum \sigma_k \alpha_k)$. Следователно разпределението на Коши е устойчиво.

□

Задача 2.24

Нека $U \in \mathrm{U}(0,1)$. Да се покаже, че случайната величина $X = U^{-\frac{1}{\alpha}}$ за положителни реални α има разпределение на Парето с плътност

$$f_X(x) = \alpha x^{-(\alpha+1)},\ x \geq 1.$$

Решение. *Доказателство.*

$$f_X(x) = \alpha x^{-\alpha-1} f_U(x^\alpha) = \alpha x^{-(\alpha+1)},\ x \geq 1.$$

□

3. Класове от разпределения в надеждността

Задача 3.1

Нека $\{p_k\}$ е вероятностно разпределение и $r_k := \sum_{i=k}^{\infty} p_i$ е разпределението на опашката. Да се покаже, че $\{r_k\}$ удовлетворява условието

$$r_{k+1}^2 \leq r_k r_{k+2},\ k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

тогава и само тогава, когато $\{p_k\}$ е с намаляваща функция на интензивност и $p_k > 0$ за безброй много $k \in \mathbb{N}$. Да се докаже, че е в сила обратното неравенство за разпределение с нарастваща функция на интензивност.

Решение. *Права посока.* Тук допускаме (1). Доказателството се състои от 2 части:

- Функцията на интензивност $h(k)$ е намаляваща:
  Понеже $\{r_k\}$ са положителни, можем да преобразуваме (1):

$$\begin{aligned} \frac{r_{k+1}}{r_k} &\leq \frac{r_{k+2}}{r_{k+1}}, \\ 1 - \frac{p_k}{r_k} &\leq 1 - \frac{p_{k+1}}{r_{k+1}}, \\ h(k) = \frac{p_k}{r_k} &\geq \frac{p_{k+1}}{r_{k+1}} = h(k+1). \end{aligned}$$

  Това доказва, че $h(k)$ е намаляваща.

- Редицата $\{p_k\}$ има безкраен носител:
  Нека има краен брой положителни вероятности в $\{p_k\}$ и нека p_k е последната такава. Тогава:

$$r_k^2 \leq \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{r_{k-1}r_{k+1}} \implies r_k^2 = 0 \implies p_k = 0, \tag{2}$$

  което противоречи с допускането за положителност на p_k. Следователно има безброй положителни членове на $\{p_k\}$ и $\{r_k\}$ са винаги положителни.

$\square$

Обратна посока. Понеже $\{p_k\}$ има безкраен носител, членовете на $\{r_k\}$ са винаги положителни и функцията на интензивност има вида:

$$h(k) = \frac{p_k}{r_k} \geq \frac{p_{k+1}}{r_{k+1}} = h(k+1), \, k \in \mathbb{N},$$

който лесно се свежда до

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} \leq \frac{r_{k+2}}{r_{k+1}} \iff r_{k+1}^2 \leq r_k r_{k+2}.$$

$\square$

4. Марковски вериги

Задача 4.1

Дадена е Марковската верига $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ с две състояния $\{0, 1\}$ и матрица на преходите

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

4.1.1.

Да се намери $\mathrm{P}(X_n = 0|X_{n-2} = 1)$ и $\mathrm{P}(X_{n+2} = 1|X_{n-1} = 1)$.

Решение. От предположението за хомогенност и теоремата на Чепмен-Колмогоров:

$$\mathrm{P}(X_n = 0|X_{n-2} = 1) = p_{1,0}(2) = p_{1,0}(1)p_{0,0}(1) + p_{1,1}(1)p_{1,0}(1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

$$\mathrm{P}(X_{n+2} = 1|X_n = 1) = p_{1,1}(2) = p_{1,0}(1)p_{0,1}(1) + p_{1,1}(1)p_{1,1}(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

4.1.2.

Нека $\mu = (\mathrm{P}(X_0 = 0), \mathrm{P}(X_0 = 1)) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Да се намери $\mathrm{P}(X_3 = 1)$.

Решение. От предположението за хомогенност и теоремата на Чепмен-Колмогоров:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_3 = 1) &= \frac{1}{2}p_{0,1}(3) + \frac{1}{2}p_{1,1}(3) = \\
&= \frac{1}{2}(p_{0,0}(1)p_{0,1}(2) + p_{0,1}(1)p_{1,1}(2) + p_{1,0}(1)p_{0,1}(2) + p_{1,1}(1)p_{1,1}(2)) = \\
&= \frac{1}{2}(p_{0,0}(1) + p_{1,0}(1))p_{0,1}(2) + \frac{1}{2}(p_{0,1}(1) + p_{1,1}(1))p_{1,1}(2) = \frac{5}{12}p_{0,1}(2) + \frac{7}{12}p_{1,1}(2) = \\
&= \frac{5}{12}(p_{0,0}(1)p_{0,1}(1) + p_{0,1}(1)p_{1,1}(1)) + \frac{7}{12}(p_{1,0}(1)p_{0,1}(1) + p_{1,1}(1)p_{1,1}(1)) = \\
&= \frac{5}{12}\left(\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\right) + \frac{7}{12}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{12}\frac{5}{9} + \frac{7}{12}\frac{7}{12} = \frac{247}{432}
\end{aligned}$$

Задача 4.2

Дадена е Марковската верига $\{X_k\}_1^\infty$ с множество на състоянията $\{0, 1, 2\}$ и матрица на преходите

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

и начално състояние 0.

4.2.1.

Да се намери $\mathrm{P}(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1)$.

Решение.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1) = \mathrm{P}(X_1 = 1, X_2 = 1 | X_0 = 0)\mathrm{P}(X_0 = 0) = \\ = \mathrm{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1, X_0 = 0)\mathrm{P}(X_1 = 1 | X_0 = 0) = \\ = \mathrm{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1)\mathrm{P}(X_1 = 1 | X_0 = 0) = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

4.2.2.

Да се намери $\mathrm{P}(X_{n+1} = 1 | X_{n-1} = 1)$.

Решение.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_{n+1} = 1 | X_{n-1} = 1) = p_{1,1}(2) = p_{1,0}(1)p_{0,1}(1) + p_{1,1}(1)p_{1,1}(1) + p_{1,2}(1)p_{2,1}(1) = \\ = \frac{1}{6} + \frac{4}{9} + 0 = \frac{11}{18}.\end{aligned}$$

4.2.3.

Да се намери вероятностното разпределение на X_2.

Решение. Нека $k \in \{0, 1, 2\}$. Тогава функцията на вероятностите има вида

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{2} \mathrm{P}(X_2 = k | X_1 = i)\mathrm{P}(X_1 = i) = \\ = \frac{1}{2}(\mathrm{P}(X_2 = k | X_1 = 1) + \mathrm{P}(X_2 = k | X_1 = 2)).\end{aligned}$$

В табличен вид:

k	0	1	2
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	0

Задача 4.3

Правилна монета се хвърля последователно и резултатът е $\{Y\}_0^\infty$, където $Y_i = 0$ или 1. Определяме $X_n = Y_n + Y_{n-1}$ за цели положителни n. Да се провери $\{X_n\}$ Марковска верига ли е? Да се обясни отговора.

Решение. Ще докажем, че $\{X_k\}$ не е Марковска верига, тъй като настоящето има неограничена зависимост от миналото.

Доказателство. X_n има явна зависимост от всички предходни членове на редицата $\{X_n\}$:

$$X_n = Y_n + Y_{n-1} = Y_n + X_{n-1} - Y_{n-2} = Y_n + X_{n-1} - X_{n-2} + Y_{n-3} = \\ = Y_n + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-1-k}X_k + (-1)^{n-1}Y_0$$

за $n \geq 2$. Тоест при дадено настояще X_n, бъдещето X_{n+1} зависи от миналото X_{n-1}, следователно $\{X_n\}$ не е Марковска.

□

Задача 4.4

Нека $\{Y_k\}_1^\infty$ са независими, еднакво разпределени случайни величини с разпределение $\pi_m = \mathrm{P}(Y_k = m)$, $m \in \mathbb{N}$. Означаваме

$$X_n = \begin{cases} \sum_{k=1}^n Y_k, n \geq 1 \\ 0, n = 0 \end{cases}.$$

Да се докаже, че $\{X_n\}$ е Марковска верига и да се намерят преходните вероятности.

Решение. $\{X_n\}$ действително е Марковска верига, защото X_n има ограничена явна зависимост от миналото: $X_n = X_{n-1} + Y_n$ за $n > 1$.

Доказателство. Условната вероятност на X_n спрямо X_{n-1} и X_{n-2} е

$$\mathrm{P}(X_n = j | X_{n-1} = i, X_{n-2} = k) = \mathrm{P}(X_{n-1} + Y_n = j | X_{n-1} = i, X_{n-2} = k) = \mathrm{P}(Y_n = j - i).$$

□

Тоест вероятността на преход от i към j за 1 стъпка има вида

$$p_{i,j} = \mathrm{I}_{\mathbb{N}}(j - i)\pi_{j-i}, \tag{1}$$

където $\mathrm{I}_{\mathbb{N}}$ е индикатор за естествените числа. Понеже Y_k са еднакво разпределени, веригата е хомогенна. От това, че носителя на Y_k е безкраен следва, че матрицата на преходите $\mathbb{P}$ също е безкрайна. От (1) следва, че $\mathbb{P}$ е и триъгълна:

$$\begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \cdots \\ 0 & \pi_0 & \pi_1 & \cdots \\ 0 & 0 & \pi_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Задача 4.5

Нека $\{Y_k\}_1^\infty$ са независими, еднакво разпределени случайни величини с разпределение $\mathrm{P}(Y_k = 1) = p$ и $\mathrm{P}(Y_k = -1) = q = 1 - p$. Да се покаже, че

$$X_n = \begin{cases} \sum_{k=1}^n Y_k, n \geq 1 \\ 0, n = 0 \end{cases}$$

е Марковска верига с преходни вероятности

$$p_{i,j} = \begin{cases} p, j = i + 1 \\ q, j = i - 1 \\ 0, \text{ в останалите случаи} \end{cases}. \tag{1}$$

Решение. Очевидно $X_n = X_{n-1} + Y_n$ и $\{X_n\}$ е Марковска верига. Ще докажем (1).

Доказателство. Условното разпределение на X_n спрямо X_{n-1} е

$$\mathrm{P}(X_n = j | X_{n-1} = i) = \mathrm{P}(Y_n = j - i).$$

От дефиницията за Y_k следва

$$\mathrm{P}(Y_n = i - j) \begin{cases} p, j - i = 1 \\ q, j - i = -1 \\ 0, \text{ в останалите случаи} \end{cases},$$

което е еквивалентно на (1).

□

Задача 4.6

Да се докаже, че за случайното блуждаене $\{X_n\}, n \in \mathbb{N}$ е в сила

$$\mathrm{P}(X_n = j | X_0 = i) = \binom{n}{\frac{n+j-i}{2}} p^{\frac{n+j-i}{2}} q^{\frac{n-j+i}{2}}, \tag{1}$$

ако $n-j+i$ е четно неотрицателно цяло число и $\mathrm{P}(X_n = j|X_0 = i) = 0$ във всички останали случаи.

Решение. Нека $Y_n = X_n - X_{n-1}$ е разпределението на единична стъпка. Ще докажем (1) по индукция.

Доказателство. Базовия случай $n = 1$ е очевиден:

$$\mathrm{P}(X_1 = j|X_0 = i) = \begin{cases} p, j-i = 1 \\ q, j-i = -1 \\ 0, \text{ в останалите случаи} \end{cases}.$$

Индукционна стъпка:

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(X_{n+1} = j|X_0 = i) = \mathrm{P}(X_n + Y_n = j|X_0 = i) = \\ =&\mathrm{P}(X_n = j-1|X_0 = i, Y_n = 1)\mathrm{P}(Y_n = 1) + \\ +&\mathrm{P}(X_n = j+1|X_0 = i, Y_n = -1)\mathrm{P}(Y_n = -1) = \\ =&p\mathrm{P}(X_n = j-1|X_0 = i) + q\mathrm{P}(X_n = j+1|X_0 = i). \end{aligned}$$

Чрез непосредствено заместване от (1) получаваме за четни $n-(j-1)+i \geq 0$

$$\mathrm{P}(X_{n+1} = j|X_0 = i) = p\binom{n}{\frac{n+j-1-i}{2}}p^{\frac{n+j-1-i}{2}}q^{\frac{n-j+1+i}{2}} + q\binom{n}{\frac{n+j+1-i}{2}}p^{\frac{n+j+1-i}{2}}q^{\frac{n-j-1+i}{2}} =$$
$$= \left(\binom{n}{\frac{n+1+j-i}{2} - 1} + \binom{n}{\frac{n+1+j-i}{2}}\right)p^{\frac{n+1+j-i}{2}}q^{\frac{n+1-j+i}{2}} = \binom{n+1}{\frac{n+1+j-i}{2}}p^{\frac{n+1+j-i}{2}}q^{\frac{n+1-j+i}{2}}.$$

□

5. Наредени статистики

Задача 5.1

Нека X_1 и X_2 са независими $\mathrm{Ge}_1(p)$-разпределени случайни величини. Да се покаже, че $X_{(1)}$ и $X_{(2)} - X_{(1)}$ са независими.

Решение. Ще покажем, че липсата на памет (геометрична функция на вероятностите) води то независимост.

Доказателство.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(X_{(2)} - X_{(1)} = k | X_{(1)} = m) = \mathrm{P}(X_{(2)} = m + k | X_{(1)} = m) = \\
&= \mathrm{P}(\max(X_1, X_2) = m + k | \min(X_1, X_2) = m) = \\
&= \mathrm{P}(\max(X_1, X_2) = m + k | X_1 = m, X_1 \leq X_2)\mathrm{P}(X_1 \leq X_2) + \\
&+ \mathrm{P}(\max(X_1, X_2) = m + k | X_2 = m, X_1 > X_2)\mathrm{P}(X_1 > X_2) = \\
&= \mathrm{P}(X_2 = m + k)\mathrm{P}(X_1 \leq X_2) + \mathrm{P}(X_1 = m + k)\mathrm{P}(X_1 > X_2) = \\
&= p^2(1-p)^{m+k}(\mathrm{P}(X_1 \leq X_2) + (1 - \mathrm{P}(X_1 \leq X_2))) = p^2(1-p)^{m+k} = \\
&= p^2(1-p)^m(1-p)^k.
\end{aligned}$$

Но това е произведение на функции на вероятностите на две независими Ge_1-разпределени случайни величини с параметри, съответно, m и k.

□

Задача 5.2

Нека X_1, X_2 и X_3 са независими $\mathrm{Exp}(\lambda)$-разпределени случайни величини с плътност

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}.$$

Бележка. Ще използваме тъждеството

$$X_{(k)} \stackrel{d}{=} \sum_{m=1}^{k} \frac{Z_m}{n - m + 1} = \sum_{m=1}^{k} \frac{Z_m}{4 - m},$$

където Z_1, Z_2 и Z_3 са $\mathrm{Exp}(1)$-разпределени случайни величини.

5.2.1.

Да се намери разпределението на $X_{(1)}$.

$$X_{(1)} \stackrel{d}{=} \frac{Z_1}{3} \implies X_{(1)} \in \mathrm{Exp}(3\lambda).$$

5.2.2.

Да се намери разпределението на $X_{(3)}$.

$$X_{(3)} \stackrel{d}{=} \frac{Z_1}{3} + \frac{Z_2}{2} + Z_3 \implies X_{(3)} \in \mathrm{Hyperexponential}(3, 2, 1).$$

5.2.3.

Да се намери разпределението на $X_{(3)} - X_{(1)}$.

Изваждаме резултатът от **??** от **??**:

$$X_{(3)} - X_{(1)} \stackrel{d}{=} \frac{Z_2}{2} + Z_3 \implies X_{(3)} \in \mathrm{Hyperexponential}(2, 1).$$

5.2.4.

Да се намери разпределението на $\dfrac{X_{(1)}}{X_1 + X_2 + X_3}$.

Решение. Не е решена.

5.2.5.

Да се намери разпределението на $\dfrac{X_{(2)}}{X_1 + X_2 + X_3}$.

Решение. Не е решена.

5.2.6.

Да се намери разпределението на $\dfrac{X_1}{X_1 + X_2 + X_3}$.

Решение. Не е решена.

5.2.7.

Да се намери разпределението на $\dfrac{X_1 + X_2}{X_1 + X_2 + X_3}$.

Решение. Не е решена.

Задача 5.3

Нека X_1 и X_2 са независими, Pareto(α)-разпределени случайни величини с плътност на разпределението

$$f(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}, x \geq 1, \alpha > 0.$$

5.3.1.

Да се намери разпределението на $X_{(1)}$.

За неотрицателни реални x плътността на $X_{(1)}$ е

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F_{X_1}(x))^2 = 1 - x^{-2\alpha},$$

тоест $X_{(1)} \in \text{Pareto}(2\alpha)$.

5.3.2.

Да се намери разпределението на $X_{(2)} - X_{(1)}$.

Първо ще намерим плътностите на $-X_{(1)}$ и $X_{(2)}$.

От **??** знаем ФР на $X_{(1)}$, намираме плътността на $-X_(1)$:

$$f_{-X_{(1)}}(x) = \frac{F_{X_{(1)}}(-x)}{dx} = 2\alpha(-x)^{-2\alpha-1}, x \leq 0.$$

Намираме плътността на $X_{(2)}$

$$f_{X_{(2)}}(x) = \frac{F_{X_{(2)}}(x)}{dx} = \frac{F^2_{X_1}(x)}{dx} = \frac{(1-x^{-\alpha})^2}{dx} = 2\alpha(1-x^{-\alpha})x^{-\alpha-1}, x \geq 0.$$

И сега намираме ФР на $X_{(2)} - X_{(1)}$ чрез конволюция:

$$F_{X_{(2)}-X_{(1)}}(x) = 4\alpha^2 \int_x^\infty y^{-\alpha-1}(1-y^{-\alpha})(y-x)^{-2\alpha-1}dy, x \geq 0, x \geq 0.$$

Полагаме $y = zx$:

$$\begin{aligned}F_{X_{(2)}-X_{(1)}}(x) = 4\alpha^2 \int_1^\infty (zx)^{-\alpha-1}[1-(zx)^{-\alpha}][x(z-1)]^{-2\alpha-1}xdz = \\ = 4\alpha^2 x^{-3\alpha-2}\left(\int_1^\infty [1-(xz)^{-\alpha}](z-1)^{-2\alpha-1}z^{-\alpha-1}dz\right), x \geq 0.\end{aligned}$$

Правим субституция на z с m^{-1}:

$$\begin{aligned}&F_{X_{(2)}-X_{(1)}}(x) = \\ &= -4\alpha^2 x^{-3\alpha-2}\left(\int_1^0 \left[1-\left(\frac{x}{m}\right)^{-\alpha}\right]\left(\frac{1-m}{m}\right)^{-2\alpha-1} m^{\alpha+1}m^{-2}dm\right) = \\ &= 4\alpha^2 x^{-3\alpha-2}\left(\int_0^1 \left[1-\left(\frac{x}{m}\right)^{-\alpha}\right](1-m)^{-2\alpha-1}m^{3\alpha}dm\right) = \\ &= 4\alpha^2 x^{-3\alpha-2}\big(B(3\alpha+1,-2\alpha) - x^{-\alpha}B(2\alpha+1,-2\alpha).\big), x \geq 0.\end{aligned}$$

5.3.3.

Да се намери разпределението на $\dfrac{X_{(2)}}{X_{(1)}}$.

Директно намираме желаната ФР:

$$F_{\frac{X_{(2)}}{X_{(1)}}}(x) = 4\alpha^2 \int_0^\infty f_{X_{(2)}}(xy) f_{X_{(1)}}(y) y dy =$$
$$= 4\alpha^2 \int_0^\infty \big(1 - (xy)^{-\alpha}\big)(xy)^{-\alpha-1} y^{-\alpha} dy = 4\alpha^2 x^{-2\alpha-1} \int_0^\infty ((xy)^\alpha - 1) y^{-3\alpha-1} dy =$$
$$= 4\alpha^2 x^{-2\alpha-1}\big(-3\alpha x^\alpha y^{-3\alpha} + 4\alpha y^{-4\alpha}\big).$$

6. Рекордни моменти и рекордни стойности

Задача 6.1

Дадена е редицата от случайни величини $\{V_n\}_{n=1}$, свързана с рекордните моменти $\{U(n)\}_{n=1}$ по следния начин:

$$V_n = \frac{U(n+1)}{U(n)}.$$

Да се покаже, че V_n са независими, еднакво разпределени случайни величини с разпределение

$$\mathrm{P}(V_n = j) = \frac{1}{j(j+1)}, n \in \mathbb{N}^+.$$

Решение. Не е решена.

Задача 6.2

Дадена е редицата $\{E_n\}_{n=1}$ от независими, еднакво Exp(1)-разпределени случайни величини. Да се покаже, че за рекордните моменти $\{U(n)\}_{n=1}$ е в сила

$$U(n+1) \stackrel{d}{=} U(n) e^{E_n} + 1$$

Решение. Не е решена.

Задача 6.3

Дадена е функцията g, дефинирана по следния начин:

$$g(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}, & n > 0. \end{cases}$$

Разглеждаме $Y_n = g(U(n)) - n$, където $U(n)$ са рекордните моменти. Да се покаже, че $\{Y_n\}_{n=1}$ е мартингал и $\mathbb{E}(Y_n) = 0$.

Решение. Не е решена.

7. Разпределение на екстремалните стойности

Задача 7.1

Нека $\{X_n\}_n$ са независими, еднакво разпределени $\mathrm{U}(0,1)$ случайни величини. Да се докаже, че при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(n(M_n - 1) \le x) = e^x,$$

където $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$

Решение. *Доказателство.* Нека $H_n = n(M_n - 1)$. Изразяваме M_n чрез H_n

$$M_n = \frac{H_n}{n} + 1$$

и намираме ФР на H_n при $n \to \infty$

$$F_{H_n}(x) = F_{M_n}\left(\frac{x}{n} + 1\right) = F_{X_1}^n\left(\frac{x}{n} + 1\right) = \left(\frac{x}{n} + 1\right)^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} e^x.$$

□

8. Разпределение с тежки опашки

Задача 8.1

Да се покаже, че ако S е функция на оцеляване на ограничена случайна величина или на $\mathrm{Erlang}(n, \lambda)$, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{S^{*2}(x)}{S(x)} = \infty.$$

Решение. Не е решена.

Задача 8.2

Да се покаже, че следните функции на разпределение са от тип Парето:

Бележка. Условието е изпълнено, ако опашката $S(x) \sim Kx^{-a}$ при $x \to \infty$ за положителни параметри K и a.

8.2.1. Разпределение на Парето $\mathrm{Pareto}(a, c)$

Решение. Опашката

$$S(x) = c^a x^{-\alpha}$$

удовлетворява условието за разпределение тип Парето с параметри $K = c^a$ и $a = \alpha$.

8.2.2. Разпределение със следната плътност

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(\ln x)^{\alpha-1}x^{-\lambda-1}, x > 1$$

Решение. Ще докаже, че разпределението не е от тип Парето. За целта ще покажем, че опашката не може да се приближи асимптотично с функция от вида $Kx^{-a}, K, a > 0$.

Доказателство.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{S(x)}{Kx^{-a}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(\ln y)^{\alpha-1}y^{-\lambda-1}dy}{Kx^{-a}} =$$

$$= (\text{L'Hopital})\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)aK}\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^{\alpha-1}x^a}{x^{\lambda+1}} = \begin{cases}0, & a < \lambda+1\\ \infty, & a \geq \lambda+1\end{cases}$$

□

8.2.3. Разпределение на Burr със следната функция на преживяване

$$S(x) = \left(\frac{b}{b+x^\gamma}\right)^\alpha$$

Решение. Опашката при $x \to \infty$ удовлетворява условието за разпределение тип Парето с параметри $K = b^\alpha$ и $a = \alpha\lambda$, както може да се види от

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{b+x^\gamma}\right)^\alpha\frac{1}{b^\alpha x^{-\alpha\lambda}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha\lambda}}{(b+x^\gamma)^\alpha} = 1.$$

8.2.4. Разпределение със следната функция на преживяване

$$S(x) = \left(\frac{c}{x}\right)^{-\alpha}L(x),$$

където

$$L(x) = \begin{cases}\left(\frac{c}{x}\right)^\alpha, & 0 \leq x < 1\\ 1, & x \geq 1\end{cases}$$

Решение. Ако заместим с $L(x)$ получаваме следния вид на опашката

$$S(x) = \begin{cases}1, & 0 \leq x < 1\\ \left(\frac{c}{x}\right)^{-\alpha}, & x \geq 1\end{cases}.$$

За достатъчно големи x (> 1) опашката условието за разпределение тип Парето с параметри $K = c^{-\alpha}$ и $a = -\alpha$.

Задача 8.3

Нека $X_1, \ldots, X_n$ са независими, еднакво обратно Гаусово разпределени случайни величини с плътност

$$f_X(x) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma x^3}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma x}}, x, \mu, \sigma > 0.$$

Означаваме: $X_i \in \mathrm{IG}(\mu, \sigma)$. Да се покаже, че сумата $S = X_1 + \cdots + X_n$ е $\mathrm{IG}(n\mu, \sigma)$-разпределена

Решение. Не е решена.

Задача 8.4

За случайната величина $X \in \mathrm{Exp}(\lambda)$ и $u > 0$ да се намери $\mathbb{E}(X|X > u)$ и $\mathbb{D}(X|X > u)$.

Решение. Първо намираме условната ФР на X:

$$F_X(x|X > u) = \begin{cases} \mathrm{P}(X < x|X > u), & x > u \\ 0, & x \leq u \end{cases} = \begin{cases} 1 - \mathrm{P}(X > u + (x-u)|X > u), & x > u \\ 0, & x \leq u \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \mathrm{P}(X + u < x), & x > u \\ 0, & x \leq u \end{cases}.$$

Но това е разпределението на трансформацията $X + u$.
Намираме очакването:

$$\mathbb{E}(X + u) = \mathbb{E}X + u = \lambda + u$$

и дисперсията:

$$\mathbb{D}(X + u) = \lambda.$$

9. Копули

Задача 9.1

Да се покаже, че следните функции са копули.

Бележка. При всяко подобно доказателство, ще доказваме следните 3 аксиоми за копула C:

Аксиома 1 За всяко $u \in \mathrm{I}$, $C(u, 0) = 0$ и $C(u, 1) = u$

Аксиома 2 За всяко $v \in \mathrm{I}$, $C(0, v) = 0$ и $C(1, v) = v$

Аксиома 3 За произволни $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathrm{I}$, такива че $u_1 \leq u_2$ и $v_1 \leq v_2$, е изпълнено неравенството

$$C(u_2, v_2) + C(u_1, v_1) \geq C(u_2, v_1) + C(u_1, v_2). \tag{1}$$

9.1.1. Докажете, че $M(u, v) = \min(u, v)$ е копула

Решение. *Доказателство.* Проверяваме аксиомите

Аксиома 1 Понеже $u > 0$, $M(u, 0) = 0$ и понеже $u < 1$, $M(u, 1) = u$.

Аксиома 2 Аналогично на Аксиома 1, $M(0, v) = 0$ и $M(1, v) = v$.

Аксиома 3 Ще разгледаме само случаите с $u_2 \geq v_2$, защото случаите с $u_2 \leq v_2$ са аналогични поради симетрията на $\min(u, v)$.

Понеже $u_2 \geq v_2$ и $v_2 \geq v_1$, то $u_2 \geq v_1$.

1. Ако $v_2 \geq u_1$ и $u_1 \geq v_1$, то неравенството (1) е изпълнено:

$$v_2 + v_1 \geq v_1 + u_1.$$

2. Ако $v_1 \geq u_1$, то неравенството (1) е изпълнено:

$$v_2 + u_1 \geq v_1 + u_1.$$

3. Ако $v_2 \leq u_1$, тогава $u_1 \geq v_1$ и неравенството (1) е равенство:

$$v_2 + v_1 = v_1 + v_2.$$

□

9.1.2. Докажете, че $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ е копула

Решение. *Доказателство.*

Аксиома 1 $W(u, 0) = \max(u - 1, 0) = 0$ и $W(u, 1) = \max(u, 0) = u$.

Аксиома 2 Аналогично на Аксиома 1, $W(0, v) = 0$ и $W(1, v) = v$.

Аксиома 3 Ще разгледаме всички възможни случаи:

1. Ако $u_2 + v_2 \leq 1$, то неравенството (1) е равенство:

$$0 + 0 = 0 + 0.$$

2. Ако $u_2 + v_2 \geq 1$, $u_2 + v_1 \leq 1$ и $u_1 + v_2 \leq 1$, то неравенството (1) е изпълнено:

$$(u_2 + v_2 - 1) + 0 = 0 + 0.$$

3. Ако $u_2+v_1 \geq 1$, $u_1+v_2 \leq 1$ и $u_1+v_1 \leq 1$, то неравенството (1) е изпълнено:

$$(u_2 + v_2 - 1) + 0 = (u_2 + v_1 - 1) + 0.$$

4. Ако $u_2+v_1 \leq 1$, $u_1+v_2 \geq 1$ и $u_1+v_1 \leq 1$, то неравенството (1) е изпълнено:

$$(u_2 + v_2 - 1) + 0 = 0 + (u_1 + v_2 - 1).$$

5. Ако $u_1 + v_1 \geq 1$, то неравенството (1) е равенство:

$$(u_2 + v_2 - 1) + (u_1 + v_1 - 1) = (u_2 + v_1 - 1) + (u_1 + v_2 - 1).$$

$\square$

9.1.3. Докажете, че $\Pi(u, v) = uv$ е копула

Решение. *Доказателство.*

Аксиома 1 $\Pi(u, 0) = 0u = 0$ и $\Pi(u, 1) = u$.

Аксиома 2 Аналогично на Аксиома 1, $\Pi(0, v) = 0$ и $\Pi(1, v) = v$.

Аксиома 3 Ще докажем неравенството $u_2v_2 + u_1v_1 \geq u_2v_1 + u_1v_2$:

$$\begin{aligned} u_2v_2 + u_1v_1 &\overset{?}{\geq} u_2v_1 + u_1v_2 \; \Big| \; /u_1v_1 \\ \frac{u_2}{u_1}\frac{v_2}{v_1} + 1 &\overset{?}{\geq} \frac{u_2}{u_1} + \frac{v_2}{v_1} \\ \frac{u_2}{u_1}\left(\frac{v_2}{v_1} - 1\right) &\overset{?}{\geq} \frac{v_2}{v_1} - 1. \end{aligned}$$

Но $u_2 \geq u_1$ и, следователно, коефициентът пред скобите е винаги не по-малък от единица. Това доказва неравенство (1).

$\square$

Задача 9.2

Да се покаже, че ако C_1 и C_2 са копули и $\theta \in [0, 1]$ е реално число, то $C_\theta = \theta C_1 + (1 - \theta)C_2$ също е копула.

Решение.

Определение 1. Нека с $L(C)$ да означим следния оператор

$$L(C) = L(C; u_1, u_2, v_1, v_2) = C(u_2, v_2) + C(u_1, v_1) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2),$$

където C е копула, а u_1, u_2, v_1 и v_2 са реални числа от единичния интервал.

Доказателство. Проверяваме аксиомите

Аксиома 1 $C_\theta(u,0) = 0\theta + 0(1-\theta) = 0$ и $C_\theta(u,1) = \theta u + (1-\theta)u = u$.

Аксиома 2 Аналогично на Аксиома 1, $C_\theta(0,v) = 0$ и $C_\theta(1,v) = v$.

Аксиома 3 Записваме (1) по следния начин $L(C_\theta) = \theta L(C_1) + (1-\theta)L(C_2) \geq 0$.

Но по условие θ, $L(C_1)$ и $L(C_2)$ са неотрицателни реални числа и, следователно, $L(C_\theta) \geq 0$.

□

Задача 9.3

Нека $\alpha, \beta \in [0,1]$ и $\alpha + \beta \leq 1$. Да се покаже, че

$$C_{\alpha,\beta}(u,v) = \alpha M(u,v) + (1-\alpha-\beta)\Pi(u,v) + \beta W(u,v)$$

е копула.

Решение. *Доказателство.* Проверяваме аксиомите

Аксиома 1 При $v = 0$, $C_{\alpha,\beta}(u,0) = 0\alpha + 0(1-\alpha-\beta) + 0\beta = 0$.
При $v = 1$, $C_{\alpha,\beta}(u,1) = u\alpha + u(1-\alpha-\beta) + u\beta = u$.

Аксиома 2 Аналогично на Аксиома 1, $C_{\alpha,\beta}(0,v) = 0$ и $C_{\alpha,\beta}(1,v) = v$.

Аксиома 3 Записваме (1) по следния начин $L(C_{\alpha,\beta}) = \alpha L(M) + (1-\alpha-\beta)L(\Pi) + \beta L(W) \geq 0$.

Но по условие α, β и $\alpha+\beta-1$ са неотрицателни реални числа и, следователно, $L(C_{\alpha,\beta}) \geq 0$.

□

Задача 9.4

Нека $\theta \in [0,1]$. Да се покаже, че

$$C_\theta(u,v) = \frac{\theta^2(1-\theta)}{2}M(u,v) + (1-\theta^2)\Pi(u,v) + \frac{\theta^2(1-\theta)}{2}W(u,v)$$

е копула.

Решение. Ще докажем, че $C_\theta(u,v)$ не е копула.

Доказателство. Проверяваме аксиомите

Аксиома 1 При $v = 1$, $C_\theta(u,1) = u\dfrac{\theta^2(1-\theta)}{2} + u(1-\theta^2) + u\dfrac{\theta^2(1-\theta)}{2} =$
$= u + u\theta^2(1-\theta) - u\theta^2 = u(1-\theta^3)$, но за да бъде копула, $C_\theta(u,1)$ трябва да бъде равна на u.

□

Задача 9.5

Нека $\theta \in [0,1]$. Да се покаже, че

$$C_\theta(u,v) = (\min(u,v))^\theta (uv)^{1-\theta} = \begin{cases} uv^{1-\theta}, u \le v \\ u^{1-\theta}v, u > v \end{cases}$$

е копула. Да се провери, че $C_0 = \Pi$ и $C_1 = M$.

Решение. *Доказателство.* Проверяваме аксиомите

Аксиома 1 При $v = 0$, $C_\theta(u,0) = 0u^\theta = 0$.
При $v = 1$, $C_\theta(u,1) = u$.

Аксиома 2 Аналогично на Аксиома 1, $C_\theta(0,v) = 0$ и $C_\theta(1,v) = v$.

Аксиома 3 Ще разгледаме два случая:

Аксиома 3 Ще разгледаме само случаите с $u_2 \ge v_2$, защото случаите с $u_2 \le v_2$ са аналогични поради симетрията на $\min(u,v)$.

Понеже $u_2 \ge v_2$ и $v_2 \ge v_1$, то $u_2 \ge v_1$.

1. Нека $v_2 \ge u_1$ и $u_1 \ge v_1$.

$$L(C_\theta) = u_2^{1-\theta}v_2 + u_1^{1-\theta}v_1 - u_2^{1-\theta}v_1 - u_1 v_2^{1-\theta} = u_2^{1-\theta}(v_2 - v_1) - u_1^{1-\theta}(u_1^\theta v_2^{1-\theta} - v_1)$$

Нека сравним $v_2 - v_1$ с $u_1^\theta v_2^{1-\theta} - v_1$:

$$u_1^\theta v_2^{1-\theta} - v_1 = \underbrace{\left(\frac{u_1}{v_2}\right)^\theta}_{\le 1} v_2 - v_1 \le v_2 - v_1$$

Следователно

$$L(C_\theta) = u_2^{1-\theta}(v_2 - v_1) - \underbrace{u_1}_{\le u_2}{}^{1-\theta}\underbrace{(u_1^\theta v_2^{1-\theta} - v_1)}_{\le v_2 - v_1} \ge 0$$

и неравенството (1) е изпълнено.

2. Нека $v_1 \ge u_1$.

$$L(C_\theta) = u_2^{1-\theta}v_2 + u_1 v_1^{1-\theta} - u_2^{1-\theta}v_1 - u_1 v_2^{1-\theta} = u_2^{1-\theta}(v_2 - v_1) - u_1(v_2^{1-\theta} - v_1^{1-\theta})$$

Нека сравним $v_2 - v_1$ с $v_2^{1-\theta} - v_1^{1-\theta}$:

$$\frac{v_2^{1-\theta} - v_1^{1-\theta}}{v_2 - v_1} = \frac{v_1^{1-\theta}}{v_1} \frac{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{1-\theta} - 1}{\frac{v_2}{v_1} - 1} = \frac{\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{1-\theta} - 1}{v_1^{\theta}\left(\frac{v_2}{v_1} - 1\right)}.$$

Но $v_1^{\theta} \leq 1$ и $\left(\dfrac{v_2}{v_1}\right)^{1-\theta} \leq \dfrac{v_2}{v_1}$, следователно $v_2^{1-\theta} - v_1^{1-\theta} \geq v_2 - v_1$.

В крайна сметка

$$L(C_\theta) = u_2^{1-\theta}(v_2 - v_1) - \underset{\substack{|\!\wedge \\ u_2^{1-\theta}}}{u_1} \underset{\substack{|\!\wedge \\ v_2 - v_1}}{(v_2^{1-\theta} - v_1^{1-\theta})} \geq 0$$

и неравенството (1) е изпълнено.

3. Нека $v_2 \leq u_1$. Тогава $u_1 \geq v_1$ и неравенството (1) е изпълнено:

$$L(C_\theta) = u_2^{1-\theta} v_2 + u_1^{1-\theta} v_1 - u_2^{1-\theta} v_1 - u_1^{1-\theta} v_2 = \underset{\substack{|\!\vee \\ 0}}{(u_2^{1-\theta} - u_1^{1-\theta})} \underset{\substack{|\!\vee \\ 0}}{(v_2 - v_1)} \geq 0.$$

$\square$